

lieren sie ihre restliche Energie nahezu ausschließlich durch elastische Stöße mit den Au-Atomen des Targets; dort kommt es zum Einschmelzen und zum erneuten Auskristallisieren größerer Bereiche des Targets.

#### 4. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird von Bestrahlungsexperimenten an Deuterium-Selbsttargets aus Au, Ni und Cu berichtet. Die Analyse des Protonenspektrums der  $D(d,p)T$ -Reaktion gestattet eine Lokalisierung der in das Target eingelagerten Deuteronen. Bei der Bestrahlung von massiven Ni- und Cu-Targets zeigt das Experiment nur einen Oberflächenanteil der  $d-d$ -Reaktion, während bei Au-Folien mittlerer Stärke ( $5 \dots 50 \text{ mg/cm}^2$ ) zusätzlich ein bedeutender innerer Reaktionsanteil zu beobachten ist. Bei sehr dünnen Au-Folien fehlen – bedingt durch Ausheizung des Targets aufgrund des Folienstroms – die inneren Reaktionen, während am massiven Au-

Target Oberflächenreaktionen neben dem inneren Anteil nicht mehr festzustellen sind. Das sind Einzelheiten der Deuteronenverteilung, wie sie mit der bisher verwendeten  $D(d,n)^3\text{He}$ -Reaktion nicht erfaßt werden konnten.

In einem zweiten Teil der Arbeit wird ein einfaches Modell der durch die Bestrahlung hervorgerufenen Deuteronendiffusion im Selbsttarget entwickelt. Nach diesem Bild schafft sich jedes eingeschossene Deuteron einen eigenen Diffusionskanal, der sich unter Verminderung seiner Temperatur ausweitet. Deuteronen, die sich im Bereich dieses Kanals befinden, erhalten kurzzeitig eine Diffusionsmöglichkeit, ehe die lokale Temperatur (durch Wärmeleitung) so weit abgesunken ist, daß eine weitere Bewegung der Deuteronen unterdrückt wird. Sie „frieren“ an ihren Positionen ein und erhalten erst durch ein weiteres eindringendes Deuteron in ihrer Nachbarschaft die erneute Möglichkeit zur Diffusion.

Wir danken Herrn Prof. Dr. W. WALCHER für die Zurverfügungstellung von Institutsmitteln.

## Begründung des Energie-Impuls-Tensors der allgemeinen Relativitätstheorie auf Grund eines kinetischen Modells der Materie

JÜRGEN AUDRETSCH

Institut für Theoretische Physik der Universität Freiburg i. Br.

(Z. Naturforschg. **22 a**, 808–815 [1967]; eingegangen am 15. Februar 1967)

The energy-momentum tensor  $T^{a\beta}$  of the general theory of relativity is investigated on the basis of a kinetic model of matter (point-particles). Its freedom of divergence results from the motion of the particles. After a suitable decomposition of  $T^{a\beta}$  into its invariant components these can be interpreted in a generally covariant manner according to their microstructure. By means of the distribution of matter special time-like world-lines are designated as stream-lines. The freedom of divergence of  $T^{a\beta}$  can be interpreted by virtue of the model as a local balance of energy and momentum. In this balance the influence of gravitational and inertial forces become immediately evident. Pressure results as a function of the particle properties (state equation).

### § 1. Einführung

Der Energie-Impuls-Tensor (E-I-T) der Materie spielt als Bestandteil der EINSTEINSCHEN Feldgleichungen der Gravitation eine dominierende Rolle bei der Untersuchung materieller Vorgänge. Da sich in der nichtrelativistischen Mechanik und Wärmetheorie statistische Methoden als tiefgehender erwiesen haben als phänomenologische Betrachtungen, wollen wir im folgenden den E-I-T auf Grund eines dem idealen Gase entsprechenden kinetischen Modells der Materie (Punktteilchen) konstruieren. Dabei lassen

wir beliebige Zustände des Gases zu, spezialisieren also nicht auf das thermodynamische Gleichgewicht. Ferner betrachten wir die gesamte raum-zeitliche Materieverteilung als vorgegeben, behandeln also nicht ihre zeitliche Entwicklung aus einem Anfangszustand. Daher tritt die Frage nach der Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik (bzw. des H-Theorems) in der allgemeinen Relativitätstheorie (a.R.) in dieser Untersuchung noch nicht auf.

Einige Beiträge zur statistischen Behandlung des E-I-T sind bereits in vorangehenden Arbeiten ge-



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

liefert worden<sup>1</sup>, die hauptsächlich auf Untersuchungen von SYNGE<sup>2</sup> aufbauen. Im Gegensatz zu diesen Arbeiten werden wir einen Rückgriff auf die spezielle Relativitätstheorie vermeiden und auch die Interpretationen (indem wir Bezugssysteme durch Beobachter repräsentieren) allgemein kovariant durchführen. Die Metrik bleibt unspezialisiert. Die Deutung der beobachtbaren makrophysikalischen Größen des E-I-T ergibt sich dabei aus ihrer mikrophysikalischen Struktur.

Dem allgemeinen Relativitätsprinzip entsprechen wir durch beobachterfreie („absolute“) Definition der Grundgrößen. Um ihre Eindeutigkeit zu garantieren, ist eine genaue Durchführung des Modells (Stoßprozesse) erforderlich.

In methodischer Hinsicht lösen wir den Begriff des Bezugssystems von dem des Koordinatensystems und definieren ihn mittels einer Beobachterfamilie allgemein kovariant. Hierzu stellen wir das Bezugssystem durch eine Kongruenz zeitartiger Weltlinien dar, deren normierte Tangentenvektoren  $o^\alpha$  als 4-Geschwindigkeiten von physikalischen Beobachtern aufzufassen sind, und erhalten damit zugleich für jeden Beobachter eine lokale Aufspaltung der 4-dimensionalen Welt in Raum und Zeit: Der zu  $o^\alpha$  orthogonale lokale Ruhraum stellt den 3-dimensionalen Erfahrungsraum dar. Die Weltlinie des Beobachters liefert den Ablauf seiner Eigenzeit, die lokale Zeitachse fällt also in Richtung von  $o^\alpha$ . Zu diesen Begriffsbildungen und Verfahren verweisen wir auf die Darstellungen bei HÖNL und DEHNEN<sup>3</sup>, aus

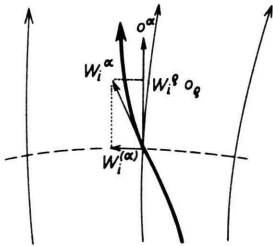


Abb. 1. Projektion der 4-Geschwindigkeit  $w_i^\alpha$  in den Erfahrungsraum (gestrichelt) und auf die Zeitachse.

denen wir noch einige Grundformeln zusammenstellen<sup>4</sup> (vgl. Abb. 1):

$$w_i^\alpha = \frac{dx_i^\alpha}{ds_i}, \quad v_i^\alpha = \frac{dx_i^\alpha}{d\tau}, \quad \beta_i^2 = -\frac{v_i^{(\alpha)} v_{i(\alpha)}}{c^2}, \quad (1.1)$$

$$\frac{d\tau}{ds_i} = w_i^\alpha o_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_i^2}}, \quad v_i^\alpha = \frac{w_i^\alpha}{w_i^\alpha o_\alpha}. \quad (1.2)$$

$w_i^\alpha$  ist die (mit der Eigenzeit  $s_i$  gebildete) 4-Geschwindigkeit des  $i$ -ten Teilchens,  $v_i^\alpha$  seine mit der Eigenzeit  $\tau$  des Beobachters gemessene Geschwindigkeit und  $v_i^{(\alpha)}$  die meßbare 3-Geschwindigkeit im Erfahrungsraum. Aus einem 4-Vektor, z. B. dem 4-Impuls des  $i$ -ten Teilchens  $p_i^\alpha = m^*_i w_i^\alpha$  ( $m^*_i$  ist seine Ruhemasse), entsteht durch Projektion in den Beobachtungsraum mittels des Projektionstensors<sup>5</sup>

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - o^\alpha o^\beta \quad (1.3)$$

ein 3-Vektor  $p_i^{(\alpha)}$  (der meßbare 3-Impuls)

$$p_i^{(\alpha)} = p_i^\alpha o_\alpha = m^*_i w_i^{(\alpha)}. \quad (1.4)$$

Durch Projektion auf die lokale Zeitachse entsteht ein Skalar  $E_{iG}$  (die meßbare Gesamtenergie des  $i$ -ten Teilchens)

$$E_{iG} = m^*_i (w_i^\alpha o_\alpha). \quad (1.5)$$

## § 2. Notwendige Eigenschaften des Energie-Impuls-Tensors und Materiemodell

Zunächst ist der E-I-T der Materie zu definieren. Eine solche Definition ist weitgehend willkürlich, denn die a.R. schränkt die Definitionsmöglichkeit ein, indem sie einen Rahmen für den E-I-T liefert, den wir durch einen geeigneten Ansatz auszufüllen haben. Hierbei werden wir uns an dem Modell orientieren, durch das wir die Materie idealisierend darstellen.

Den allgemeinen Rahmen stellen die EINSTEINSchen Feldgleichungen der Gravitation

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} = -\kappa T^{\alpha\beta} \quad (2.1)$$

<sup>1</sup> Siehe z. B. C. M. MARLE, C. R. Acad. Sci., Paris **260**, 6300 u. 6539 [1965]; W. ISRAEL, J. Math. Phys. **4**, 1163 [1963]. — Vgl. auch die phänomenologischen Untersuchungen von C. ECKHART, Phys. Rev. **58**, 919 [1940]; A. H. TAUB, Phys. Rev. **94**, 1468 [1954]; **103**, 454 [1956]; E. C. G. STUECKELBERG u. G. WANDERS, Helv. Phys. Acta **26**, 307 [1953].

<sup>2</sup> J. L. SYNGE, Relativity (the General Theory), North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1964, 159 ff. bzw. speziell relativistisch J. L. SYNGE, The Relativistic Gas, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1957.

<sup>3</sup> H. DEHNEN, Z. Phys. **179**, 76 [1964]; siehe weiterhin<sup>11</sup>.

<sup>4</sup> Signatur:  $---+$ ; Einheitenkonvention:  $c=1$ ; griechische Buchstaben sind Tensorindizes:  $\alpha=1, 2, 3, 4$  (Summenkonvention);  $i$  und  $j$  sind Teilchenindizes (keine Summenkonvention).

<sup>5</sup> Die Indizes projizierter Größen sind in Klammern gesetzt:  $(\alpha)$ ,  $(\varrho)$ ,  $(\beta)$ .

dar. Hierin beschreibt  $T^{\alpha\beta}$  die Verteilung aller nicht-gravitativen Energie, Impulse und Spannungen. Seine beiden fundamentalen Eigenschaften sind gemäß (2.1) die Symmetrie

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \quad (2.2)$$

und die Divergenzfreiheit

$$T^{\alpha\beta}_{||\alpha} = 0. \quad (2.3)$$

Im Gegensatz zu einer phänomenologischen Theorie der Materie, die sich im wesentlichen mit diesen beiden Eigenschaften begnügt, werden wir  $T^{\alpha\beta}$  eine Struktur geben, indem wir folgendes kinetische Modell für die Materie zugrunde legen: 1. Das System besteht nur aus Materie und Gravitationsfeld. 2. Die Materie hat Teilchencharakter. Die Teilchen (ohne innere Freiheitsgrade) betrachten wir als kleine starre Kugeln mit Ruhmassen  $m^*_i$ , welche wir durch die im Schwerpunkt vereinigte Masse repräsentieren wollen und deren Volumen vernachlässigbar klein gegen das Gasvolumen ist (Punktteilchen). 3. Die Teilchen wechselwirken miteinander einmal rein gravitativ und zum anderen durch Stöße, welche gemäß 2. in genau einem Punkt der Raum-Zeit stattfinden (Punktwechselwirkung) und als vollkommen elastisch betrachtet werden sollen. Gemäß den Feldgleichungen bewegen sich die Teilchen zwischen den Stößen geodätisch<sup>6</sup>:

$$w_i^\alpha w_{i\beta} = 0. \quad (2.4)$$

Beschrieben wird durch ein solches Modell beispielsweise ein einatomiges ideales Gas, das sich allerdings nicht im thermodynamischen Gleichgewicht zu befinden braucht, so daß auch Transportphänomene (z. B. Wärmeströmung) auftreten können.

### § 3. Konstruktion des Energie-Impuls-Tensors und Beweis der Divergenzfreiheit

Die Bedeutung des E-I-T gemäß § 2 und die Symmetrieeigenschaft (2.2) geben Hinweis zu seiner Konstruktion. Da die Bahnen der Einzelteilchen ein „Weltliniennetz“ bilden, ist aus den zunächst nur auf den einzelnen Weltlinien gegebenen Größen durch Paralleltransport zum jeweiligen Aufpunkt A ein Tensorfeld zu konstruieren. Hierbei ist es sinnvoll, den 4-Impuls eines Teilchens jeweils in dessen lokalen Ruhraum geodätisch parallel zu verschieben.

<sup>6</sup> Bei der Ableitung von (2.4) ist das Fehlen innerer Freiheitsgrade bei den Teilchen wesentlich. Einen Überblick über das Bewegungsproblem in der a. R. gibt A. PAPAETROU, Fortschr. Phys. 1, 29 [1953].

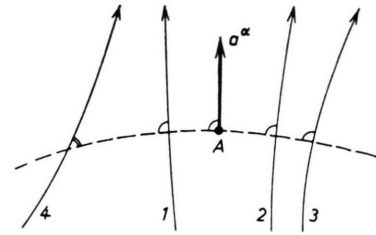


Abb. 2. Gemeinsamer lokaler Ruhraum (gestrichelt) der Teilchen 1–3. Teilchen 4 gehört der  $a^2$  zugeordneten Kongruenz nicht an.

Um dieses durchzuführen, geben wir in A einen beliebigen zeitartigen Vektor  $a^2$  vor. Die Gesamtheit der raumartigen Geodäten, die in A orthogonal zu  $a^2$  einmünden, bilden eine raumartige geodätische Hyperfläche. Diese schneidet Teilchenweltlinien in der infinitesimalen Umgebung von A, unter ihnen auch solche, deren Tangente im Schnittpunkt orthogonal auf der Hyperfläche steht. Auf diese Weltlinien beschränken wir uns (vgl. Abb. 2). Ihre Tangente im Schnittpunkt ist nach geodätischer Propagation nach A parallel zu  $a^2$  und soll dort  $w_i^2$  genannt werden, wenn sie vom  $i$ -ten Teilchen stammt. (Teilchen, welche in der Umgebung von A einen Stoß erleiden, werden zunächst außer Acht gelassen.)

Diese Teilchenweltlinien bilden in einer hinreichend kleinen Umgebung von A eine Kongruenz zeitartiger Weltlinien mit dem „Querschnitts“-Volumen  $\delta_3 V_a$  (invariantes 3-Volumenelement aus dem gemeinsamen Ruhraum der Teilchen). Wir ordnen  $\delta_3 V_a$  über

$$\delta_3 V_a = \delta_3 V_i \quad (3.1)$$

den Einzelteilchen zu. Es gilt dann u. a.

$$\frac{1}{\delta_3 V_a} \sum_i^{[a]} m^*_i w_i^\alpha w_i^\beta = \sum_i^{[a]} \frac{m^*_i w_i^\alpha w_i^\beta}{\delta_3 V_i}. \quad (3.2)$$

Ebenso lassen sich mit weiteren zeitartigen Vektoren  $b^2, c^2$  usw. in A alle anderen Teilchen in gleicher Weise erfassen und mit den zugehörigen  $\delta_3 V_b, \delta_3 V_c$  usw. zu (3.2) analoge Summen bilden. Die Gesamtheit dieser Einzelsummen fassen wir zu einer Gesamtsumme zusammen, die wir als Ansatz für  $T^{\alpha\beta}$  verwenden wollen, wobei  $i$  über die Indizes aller oben erfaßten Teilchen läuft:

$$T^{\alpha\beta} = \sum_i \frac{m^*_i w_i^\alpha w_i^\beta}{\delta_3 V_i}. \quad (3.3)$$

Im Hinblick auf spätere Interpretationen wollen wir  $T^{\alpha\beta}$  derart umformen, daß es sich nur aus Grö-

ßen zusammensetzt, die sich auf das Element  $\delta_3 V$  des Erfahrungsraumes (Orthogonalraum) eines mit  $o^\alpha$  bewegten Beobachters beziehen und somit meßbar sind. Wir verwenden hierzu die zwischen den raumartigen Volumenelementen und ihren zeitartigen Normalen bestehende Beziehung (Projektionsformel, siehe Abb. 3):

$$\delta_3 V_i = \delta_3 V (w_i^\alpha o_\alpha), \quad (3.4)$$

die mit (3.3) für den E-I-T

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\delta_3 V} \sum_i \frac{m_i^* w_i^\alpha w_i^\beta}{w_i^\alpha o_\alpha} \quad (3.5)$$

ergibt. Ohne Wertänderung für  $T^{\alpha\beta}$  können hierin, wie beabsichtigt, die  $w_i^\alpha$  am Ort des Volumens  $\delta_3 V$  genommen werden, denn die Weltlinien, die  $\delta_3 V_i$

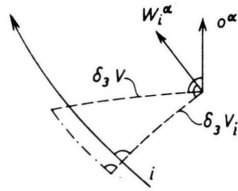


Abb. 3. Zur Projektionsformel (3.4).  $i$  kennzeichnet die Weltlinie des  $i$ -ten Teilchens.

senkrecht schneiden, gehen auch durch  $\delta_3 V$  (beides infinitesimale Volumenelemente). Weiterhin ist die 4-Geschwindigkeit des  $i$ -ten Teilchens nach Paralleltransport vom Schnittpunkt seiner Weltlinie mit  $\delta_3 V$  nach A in niedrigster Näherung gleich  $w_i^\alpha$ .  $i$  läuft nunmehr über die Indizes aller von  $\delta_3 V$  erfaßten Teilchen.

Wenn Stöße zugelassen sind, ist unsere Konstruktion (3.3) im allgemeinen nicht durchführbar. Zum Beispiel wird in Abb. 4 Teilchen 2 nicht erfaßt, da keine raumartige geodätische Hyperfläche existiert, die durch A geht und seine Weltlinie senkrecht schneidet. In solchen Fällen konstruieren wir den Bestand-

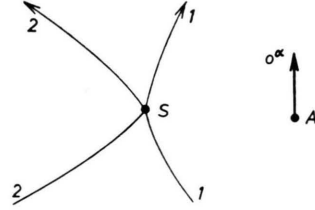


Abb. 4. Zur Diskussion der Stoßprozesse.

teil  $sT^{\alpha\beta}$  von  $T^{\alpha\beta}$ , der durch die Stoßpartner gebildet wird, mit einem beliebigen  $\delta_3 V$  wie in (3.5), gehen dann über (3.4) auf (3.3) zurück und erhalten schließlich auch für diesen Fall insgesamt die beiden Grundgleichungen (3.3) und (3.5).

Im Hinblick auf die Eindeutigkeit dieses Verfahrens bleibt allerdings zu zeigen, daß  $\delta_3 V$  tatsächlich beliebig wählbar ist, daß also das gleiche Ergebnis für  $sT^{\alpha\beta}$  erzielt wird, wenn entweder alle Stoßpartner vor oder alle nach dem Stoß erfaßt werden. Gleichbedeutend damit ist der Nachweis, daß die beiden Fälle im Stoßpunkt S (d. h. für die unendlich vielen raumartigen Hyperflächenelemente  $\delta_3 V$ , die S und A enthalten) ineinander übergehen. Mit Hilfe des 4-Impuls-Erhaltungssatzes beim Stoß<sup>7</sup> ergibt sich, daß die beiden Ausdrücke für  $sT^{\alpha\beta} o_\beta$  mit allen zu den jeweiligen  $\delta_3 V$  gehörigen  $o^\alpha$  ineinander übergehen. Daher gilt diese Gleichheit schließlich auch für  $sT^{\alpha\beta}$  selber.

Bei unserem Ansatz für den E-I-T ist die Symmetrie (2.2) gewährleistet, hingegen bleibt die Divergenzfreiheit (2.3) als notwendige Bedingung eigens nachzuweisen. Wir dürfen hierzu auch bei Vorliegen von Stößen von der Form (3.3) ausgehen, wie auf Grund des 4-Impuls-Erhaltungssatzes beim Stoß bereits gezeigt wurde. Weiterhin verwenden wir Gl. (2.4) für die geodätische Bewegung der Einzelteilchen und machen zusätzlich von folgenden geometrischen Sätzen Gebrauch<sup>9</sup>:

<sup>7</sup> Da sich durch die Existenz eines Relativitätsprinzips (R.p.) auch in der a.R.<sup>8</sup> im Stoßpunkt Abhängigkeiten zwischen den Erhaltungssätzen finden, können wir mit einem Minimum an Postulaten auskommen. Wir fordern nur die Erhaltung der Gesamtenergie beim Stoß:

$$\sum_j m_j^* w_j^\alpha o_\alpha \stackrel{!}{=} \sum_j m_j^{*'} w_j^{\alpha'} o_\alpha. \quad (3.6)$$

( $'$  kennzeichnet Größen nach dem Stoß,  $\stackrel{!}{=}$  gilt nur im Stoßpunkt). (3.6) ist nach dem R.p. unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters und gilt somit für beliebige  $o^\alpha$  mit  $o^\alpha o_\alpha = +1$ . Der 4-Impuls-Erhaltungssatz beim Stoß

$$\sum_j m_j^* w_j^\alpha \stackrel{!}{=} \sum_j m_j^{*'} w_j^{\alpha'} \quad (3.7)$$

ergibt sich hiermit als Folge von (3.6). — Die Voraussetzung, daß die Stöße elastisch sind, ist gleichbedeutend mit der Erhaltung der kinetischen Energie. Hieraus folgt zusammen mit Postulat (3.6) die Erhaltung der Gesamttruhmasse:

$$\sum_j m_j^* = \sum_j m_j^{*'} \quad (3.8)$$

<sup>8</sup> Zu den globalen Abhängigkeiten in NEWTONScher Mechanik und spez. Relativitätstheorie vgl. z. B. BERGMANN, Special Theory of Relativity, in Handb. d. Phys., Bd. IV, S. FLÜGGE (Ed.), Springer-Verlag, Berlin 1962, S. 144 ff.

<sup>9</sup> Zu einer Theorie der zeitartigen Kurvenkongruenzen in EINSTEINSchen Gravitationsfeldern vgl. z. B. M. TRÜMPER, DISS., Hamburg 1961, S. 6 ff. Siehe auch J. EHLERS, Akad. Wiss. Mainz, Abh. Math.-Nat. Kl. 1961, Nr. 11, S. 798 ff.

Für den normierten Tangentenvektor  $w^a$  einer einzelnen Weltlinie aus einer zeitartigen Kongruenz ist

$$w^a|_a = \Theta \quad (3.9)$$

die Expansionsgeschwindigkeit der Kongruenz. Sei  $\delta_3 V$  ein beliebiges infinitesimales Volumen auf der Hyperfläche orthogonal zu  $w^a$ , so gilt<sup>9</sup>:

$$\Theta = \frac{1}{\delta_3 V} (\delta_3 V)|_a w^a. \quad (3.10)$$

Alle zu  $a^a$  bzw.  $b^a$  usw. gehörigen Weltlinien bilden jeweils in der Umgebung von A eine solche Kongruenz. Es folgt daher aus (3.9) und (3.10) mit Rücksicht auf (3.1)

$$w^a|_a = \frac{1}{\delta_3 V_i} (\delta_3 V_i)|_a w_i^a \quad (3.11)$$

und somit:

$$\left( \frac{w_i^a}{\delta_3 V_i} \right)|_a = 0. \quad (3.12)$$

Aus (2.4) und (3.12) erhalten wir schließlich die Divergenzfreiheit von  $T^{a\beta}$ , Gl. (3.3):

$$T^{a\beta}|_a = \sum_i m^*_i \left[ \left( \frac{w_i^a}{\delta_3 V_i} \right)|_a w_i^\beta + \frac{1}{\delta_3 V_i} w_i^\beta|_a w_i^a \right] = 0. \quad (3.13)$$

#### § 4. Deutung der Bestandteile des Energie-Impuls-Tensors in invarianter Weise

Wie jeder symmetrische Tensor, so läßt sich auch  $T^{a\beta}$  bezüglich eines beliebigen zeitartigen Einheitsvektors  $o^a$  wie folgt invariant zerlegen:

$$T^{a\beta} = \mu o^a o^\beta + q^{(a} o^{\beta)} + q^{(\beta)} o^a + \Theta^{(a} o^{\beta)}, \quad (4.1)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mu &= T^{a\beta} o_a o_\beta, \quad q^{(a} = T^{a\beta} o_\beta h_a^{\phantom{a}\beta}, \\ \Theta^{(a} o^{\beta)} &= T^{a\beta} h_a^{\phantom{a}\alpha} h_\alpha^{\phantom{a}\beta}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Wir interpretieren die in (4.2) definierten Größen auf Grund von (3.5), indem wir  $o^a$  als die 4-Geschwindigkeit eines Beobachters auffassen. Demgegenüber ist eine phänomenologische Deutung, die durch Vergleich mit den entsprechenden Größen in analogen Gesetzen der NEWTONschen Physik gewonnen wird, nicht zwingend, da sich nunmehr auch relativistische und auf das Gravitationsfeld zurückgehende Effekte in den Gleichungen widerspiegeln.

Gemäß (3.5) finden wir für den ersten Term in (4.2):

$$\mu = \frac{1}{\delta_3 V} \sum_i m^*_i (w_i^a o_a) = \frac{1}{\delta_3 V} \sum_i E_{iG}. \quad (4.3)$$

Nach (1.5) ist  $E_{iG}$  die vom Beobachter gemessene Gesamtenergie des  $i$ -ten Teilchens. Folglich ist  $\mu$  die Dichte der auf den Beobachter bezogenen Gesamtenergie der Materie.

Der 2. Term in (4.2) ergibt analog

$$\begin{aligned} q^{(a} &= \frac{1}{\delta_3 V} \sum_i m^*_i w_i^{(a)} = \frac{1}{\delta_3 V} \sum_i m^*_i \frac{dx_i^{(a)}}{ds_i} \\ &= \frac{1}{\delta_3 V} \sum_i m^*_i (w_i^a o_a) \frac{dx_i^{(a)}}{d\tau} = \frac{1}{\delta_3 V} \sum_i E_{iG} v_i^{(a)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Hierin ist  $v_i^{(a)}$  die 3-Geschwindigkeit, die der Beobachter am Teilchen mißt.  $q^{(a)}$  ist somit der resultierende Vektor des Flusses der Gesamtenergie der Teilchen (gesamter Relativimpuls).

Der letzte Term in (4.2) geht mit (3.5) in

$$\Theta^{(a} o^{\beta)} = \frac{1}{\delta_3 V} \sum_i \frac{m^*_i w_i^{(a)} w_i^{(\beta)}}{w_i^a o_a} \quad (4.5)$$

über, woraus wir mit (1.2) und (1.4)

$$\Theta^{(a} o^{\beta)} = \frac{1}{\delta_3 V} \sum_i p_i^{(a)} v_i^{(\beta)} \quad (4.6)$$

ableiten. Wie in der NEWTONschen Physik ist dieser aus den Komponenten von meßbaren 3-Impulsen und 3-Geschwindigkeiten multiplikativ zusammengesetzte Tensor der (relativistische) Spannungstensor des Gases. Auch in der a.R. besitzt er wegen

$$\Theta^{(a} o^{\beta)} = \Theta^{(\beta)} o^a, \quad \Theta^{(a} o^{\beta)} o_\beta = 0 \quad (4.7)$$

nur 6 unabhängige Komponenten.

#### § 5. Stromlinien und Massenstromvektor

Wie in der nichtrelativistischen Physik ist zu erwarten, daß durch die Bewegung der Materieverteilung ein System zeitartiger Weltlinien ausgezeichnet wird mit der Eigenschaft, daß alle Vorgänge eine besonders einfache Beschreibung zulassen, wenn sie auf dieses System bezogen werden. Wir führen diese (sich nicht überschneidenden) Weltlinien derart ein, daß wir für das Feld ihrer zeitartigen Tangentenvektoren  $u^a$  die klassische Stromliniendefinition

$$\varrho u = \sum_k \varrho_k u_k \quad (5.1)$$



entsprechend dem kinetischen Modell der Materie sinngemäß übertragen:  $\varrho_k$  bedeuten in (5.1) die Partialdichte der Bestandteile,  $v_k$  deren Geschwindigkeiten und  $\varrho$  die Gesamtdichte. Ferner ist  $u^2$  zu normieren

$$u^2 u_\alpha = +1, \quad (5.2)$$

so daß  $u^2$  auch als Beobachter-4-Geschwindigkeit aufgefaßt werden kann.

Obwohl die Stromlinien absolute Bedeutung haben, werden wir sie, um die Analogie zu (5.1) besonders deutlich zu machen, zunächst auf ein davon unabhängiges Weltliniensystem von Beobachtern beziehen. (5.1) läßt sich dann entweder gemäß

$$\left( \sum_i \frac{m^*_i}{\delta_3 V} \right) u^{*(2)} = \sum_i \frac{m^*_i}{\delta_3 V} v_i^{(2)} \quad (5.3)$$

oder gemäß

$$\left( \sum_i \frac{m^*_i (w_i^\alpha o_\alpha)}{\delta_3 V} \right) u^{*(2)} = \sum_i \frac{m^*_i (w_i^\alpha o_\alpha)}{\delta_3 V} v_i^{(2)} \quad (5.4)$$

mit [vgl. (1.2)]

$$u^{*2} = u^2 / u^\alpha o_\alpha \quad (5.5)$$

verallgemeinern. Aus (5.3) und (5.4) kann über den Projektionsoperator (1.3) und die Normiertheit (5.2)  $u^{*2}$  jeweils bestimmt werden. Hiermit ergibt sich schließlich  $u^2$  aus (5.5).

Beziehen wir alle Vorgänge auf die Stromlinien selbst, so bewegt sich der Beobachter mit  $u^2$ ; es gilt also

$$o^\alpha = u^\alpha. \quad (5.6)$$

Aus (5.3) erhalten wir damit ( $u^{(2)} = 0$ ):

$$\frac{1}{\delta_3 V} \sum_i m^*_i v_i^{(2)} = 0. \quad (5.7)$$

Die Gl. (5.4) soll nicht weiterverfolgt werden. Bezüglich der durch sie bestimmten Weltlinien würde der resultierende Energiefluß verschwinden, wie ein Vergleich von (5.4) und (5.6) mit (4.4) zeigt. Weiterhin kann der Massenstromvektor nur über (5.3) derart definiert und behandelt werden, daß wir mit ihm einen weiteren Anschluß an die bekannte kontinuumsmechanische Formulierung erhalten. Wir fassen daher (5.2) und (5.7) als die 4 beobachter-unabhängigen Bestimmungsgleichungen für  $u^2$  auf<sup>10</sup>.

Während die Deutungen von  $\mu$  und  $\Theta^{(\alpha)(\beta)}$  in § 5 im Falle eines mit der Strömungsgeschwindigkeit  $u^2$  bewegten Beobachters ungeändert übernommen werden können, vereinfacht sich die von  $q^{(2)}$ . Wir kön-

nen (4.4) mit Hilfe von (5.7) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} q^{(2)} &= \frac{1}{\delta_3 V} \sum_i m^*_i (w_i^\alpha u_\alpha) v_i^{(2)} \\ &= \frac{1}{\delta_3 V} \sum_i [m^*_i (w_i^\alpha u_\alpha) - m^*_i] v_i^{(2)} \\ &= \frac{1}{\delta_3 V} \sum_i E_{iK} v_i^{(2)}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

wobei

$$E_{iK} = m^*_i (w_i^\alpha u_\alpha) - m^*_i = E_{iG} - m^*_i \quad (5.11)$$

die kinetische Energie des  $i$ -ten Teilchens darstellt.  $q^{(2)}$  ist nunmehr der resultierende Fluß der kinetischen Energie und somit der Wärmestromvektor. Wie in der NEWTONschen Physik besteht er aus 3 unabhängigen Komponenten und liegt ganz im Beobachtungsraum.

Wir definieren ferner den Massenstromvektor  $m^2$  zunächst in absoluter Weise durch:

$$m^2 = \sum_i \frac{m^*_i w_i^\alpha}{\delta_3 V_i}. \quad (5.12)$$

Das Konstruktionsverfahren ist das gleiche wie bei  $T^{\alpha\beta}$ , wobei wir die durch Stöße entstehenden Schwierigkeiten wie in § 3 unter Benutzung des Erhaltungssatzes der Gesamttruhmasse beim Stoß (3.8) umgehen. Aus dem geodätischen Verhalten der Einzelteilchen folgt mit (3.12) die Divergenzfreiheit von  $m^2$ :

$$m^2_{||\alpha} = \sum_i m^*_i \left( \frac{w_i^\alpha}{\delta_3 V_i} \right)_{||\alpha} = 0. \quad (5.13)$$

Weiter zeigen wir, daß  $m^2$  parallel zu  $u^2$  ist. Indem wir (5.12) zunächst mit (3.4) umformen, so dann die  $w_i^\alpha$  mit Hilfe des Projektionstensors (1.3) zerlegen, die  $w_i^{(2)}$  gemäß (1.2) durch  $v_i^{(2)}$  ausdrücken und schließlich unter Berücksichtigung von (5.7) zusammenfassen, finden wir:

$$m^2 = \left( \frac{1}{\delta_3 V} \sum_i m^*_i \right) u^2 = \varrho^* u^2, \quad \varrho^* = \frac{1}{\delta_3 V} \sum_i m^*_i. \quad (5.14)$$

<sup>10</sup> Um deutlich zu machen, daß die hierdurch bestimmten Weltlinien durch die Materieverteilung allein festgelegt sind, definieren wir  $u^2$  [über die projizierten Größen, vgl. (1.3)] implizit durch (5.1) und

$$\sum_i \frac{m^*_i w_i^{(2)}}{\delta_3 V_i} = 0 \quad (5.8)$$

und konstruieren diesen Vektor nach dem bei  $T^{\alpha\beta}$  angewandten Verfahren. Mit der bezügl.  $u^2$  gebildeten Projektionsformel (3.4) erhalten wir daraus (5.7):

$$\sum_i \frac{m^*_i v_i^{(2)}}{\delta_3 V} = 0. \quad (5.9)$$

Die oben definierten Stromlinien sind also Absolutgrößen.

Hierbei stellt  $\rho^*$  die Dichte der Ruhmassen der Teilchen dar.  $m^*$  selber ist somit derjenige Anteil der 4-Impulsdichte der Strömung, welcher in den Ruhmassen der Teilchen seinen Ursprung hat.

### § 6. Bilanzgleichungen für Energie und Impuls

Die Divergenzfreiheit (2.3) stellt in der phänomenologischen Theorie den differentiellen Energie- und Impulssatz der Materie dar. Um dieses auch für unseren Ansatz nachzuweisen und damit unsere Deutung von  $T^{\alpha\beta}$  weiter zu erhärten, gehen wir wieder auf das Verhalten der Einzelteilchen zurück und untersuchen die lokalen Änderungen von Energie und Impuls in einem infinitesimalen Volumenelement (Umgebung eines Beobachters).

Bei der Durchführung beschränken wir uns auf den vektoriellen Bestandteil von (3.2), der durch Projektion in den Beobachterraum entsteht:

$$0 = T^{\alpha\beta}{}_{||\alpha} h_o^\beta = (\mu o^\alpha o^\beta)_{||\alpha} h_o^\beta + q^{(\alpha)} o^\beta{}_{||\alpha} h_o^\beta + q^{(\beta)} o^\alpha{}_{||\alpha} + \Theta^{(\alpha)(\beta)}{}_{||\alpha} h_o^\beta. \quad (6.1)$$

(Der skalare Bestandteil  $T^{\alpha\beta}{}_{||\alpha} o_\beta = 0$  läßt sich dann in analoger Weise als Energiebilanz deuten.) Die Rolle der einzelnen Summanden in (6.1) wird deutlich, wenn wir zunächst die Makrogrößen gemäß der entsprechenden Gleichungen in § 4 umformen und dann für die Bestimmungsgrößen der Einzelteilchen eine allgemein-relativistische Dynamik der Einzelteilchen verwenden, wie sie HÖNL und DEHNEN<sup>11</sup> für Polteilchen entwickelt haben. Nach den dortigen Rechnungen ergibt sich aus der Geodäsie für die 3-Kraft  $G_{i\mu}$ , die bei geodätischer Bewegung am  $i$ -ten Teilchen angreift und sich aus Gravitations- und Trägheitskräften (z. B. Zentrifugal- und CORIOLIS-Kräfte) zusammensetzt:

$$G_{i\mu} = m^*_i (w_i^\alpha o_\alpha) [A_\mu + B_{\mu\nu} v_i^{(\nu)}] \quad (6.2)$$

$$\text{mit} \quad \begin{cases} A_\mu = F_{\mu\nu} o^\nu, & F_{\mu\nu} = o_\nu{}_{||\mu} - o_\mu{}_{||\nu}, \\ B_{\mu\nu} = F_{(\mu}{}_{\nu)}, & G_{i\mu} = G_{i(\mu)}. \end{cases} \quad (6.3)$$

Die rechte Seite von (6.2) ist hiernach die vom Beobachter wahrgenommene totale zeitliche Änderung des 3-dimensionalen (Relativ-)Impulses des Einzelteilchens. Hiermit lassen sich die Summanden in (6.1) umformen; wir erhalten mit Hilfe von (6.3) im einzelnen:

$$(\mu o^\alpha o^\beta)_{||\alpha} h_o^\beta = -\mu A^\beta, \quad (6.4)$$

<sup>11</sup> H. DEHNEN, WISS. Z. Univ. Jena **15** (Heft 1), 15 [1966] u. H. HÖNL u. H. DEHNEN, Z. Phys. **191**, 313 [1966].

$$q^{(\alpha)} o_\alpha{}_{||\alpha} h_o^\beta + q^{(\beta)} o^\alpha{}_{||\alpha} h_o^\beta = -q^{(\alpha)} B^\beta{}_\alpha + L_o q^{(\beta)}, \quad (6.5)$$

$$L_o q^{(\beta)} + q^{(\beta)} o^\alpha{}_{||\alpha} = \frac{1}{\delta_3 V} L_o p^{(\beta)}; \quad p^{(\beta)} = \sum_i m^*_i w_i^{(\beta)}. \quad (6.6)$$

$L_o$  ist die LIE-Ableitung in Richtung  $o^\alpha$ ;  $p^{(\beta)}$  ist der resultierende 3-Impuls aller Teilchen. Setzen wir (6.4–6) in (6.1) ein und fassen gemäß (6.2) zusammen, so erhalten wir:

$$\frac{1}{\delta_3 V} L_o p^{(\beta)} = \frac{1}{\delta_3 V} G^{(\beta)} - \Theta^{(\alpha)(\beta)}{}_{||\alpha} h_o^\beta; \quad G^{(\beta)} = \sum_i G_i^{(\beta)}. \quad (6.7)$$

Diese Beziehung läßt sich komponentenweise deuten, wenn wir im Beobachterpunkt A einen bis auf Raumartigkeit beliebigen Vektor  $X^{(\alpha)}$  vorgeben. Durch Paralleltransport längs Geodäten zu jedem Nachbarpunkt wird er zu einem Vektorfeld ausgebaut. In A gilt dann:

$$X^{(\alpha)}{}_{||\beta} = 0. \quad (6.8)$$

$a^{(\alpha)} X_{(\alpha)}$  ist die  $X$ -„Komponente“ eines Vektors  $a^\alpha$  in A. Hiermit folgt aus (6.7):

$$\frac{1}{\delta_3 V} X_{(\beta)} L_o p^{(\beta)} = \frac{1}{\delta_3 V} X_{(\beta)} G^{(\beta)} - X_{(\beta)} \Theta^{(\alpha)(\beta)}{}_{||\alpha}. \quad (6.9)$$

Wir veranschaulichen den letzten Term in (6.9), indem wir ihn über ein kleines Volumen  $V$  des  $V^4$  integrieren und das Integral mit Hilfe des GAUSSschen Satzes umformen (vgl. Abb. 5):

$$\begin{aligned} & \oint_{\bar{V}} X_{(\beta)} \Theta^{(\alpha)(\beta)}{}_{||\alpha} d_4 V + \oint_{\bar{V}} X_{(\beta)}{}_{||\alpha} \Theta^{(\alpha)(\beta)} d_4 V \\ &= \oint_{\bar{V}} (X_{(\beta)} \Theta^{(\alpha)(\beta)}{}_{||\alpha}) d_4 V = \oint_{\bar{O}} \varepsilon(n) X_{(\beta)} \Theta^{(\alpha)(\beta)} n_\alpha dO \\ &= - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\bar{O}} X_{(\beta)} \Theta^{(\alpha)(\beta)} n_{(\alpha)} d\bar{O} d\tau. \end{aligned} \quad (6.10)$$

$\tau$  ist die Eigenzeit der Beobachterweltlinie;  $\bar{V}$  liegt in der 3-dimensionalen zu  $o^\alpha$  orthogonalen Hyperfläche. Beim Zusammenziehen des Volumens auf einen genügend kleinen Bereich um A kann in (6.10) das 2. Integral der linken Seite wegen (6.8) gegenüber den anderen vernachlässigt werden; wir finden mit (4.6) nach Differentiation nach  $\tau$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{V}} X_{(\beta)} \Theta^{(\alpha)(\beta)}{}_{||\alpha} d_3 V = - \int_{\bar{O}} X_{(\beta)} \Theta^{(\alpha)(\beta)} n_{(\alpha)} d\bar{O} \\ &= - \int_{\bar{O}} \sum_i \frac{p_i^{(\beta)} X_{(\beta)}}{\delta_3 V} v_i^{(\alpha)} n_{(\alpha)} d\bar{O}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

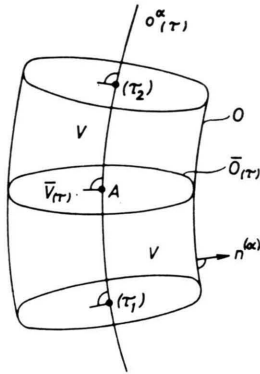


Abb. 5. Zur Verdeutlichung der Bilanzgleichung (6.9).

Hiermit bedeutet der zweite Bestandteil der rechten Seite von (6.9)

$$X_{(\beta)} \Theta^{(\alpha)(\beta)}|_{||\alpha} \delta_3 V$$

die  $X$ -Komponente des gesamten in der Zeit  $d\tau$  aus der Oberfläche des Volumenelementes  $\delta_3 V$  ausströmenden 3-Impulses.

Beachten wir, daß die LIE-Ableitung von  $p^{(\alpha)}$  in Richtung  $o^\alpha$  die natürliche Verallgemeinerung der partiellen Ableitung von  $p^{(\alpha)}$  nach der Eigenzeit des mit  $o^\alpha$  bewegten Beobachters ist, so stellt (6.9) nach Multiplikation mit  $\delta_3 V$  folgende Impulsbilanz dar: Die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses eines Volumenelementes im Erfahrungsraum ist komponentenweise gleich der Summe der Gravitations- und Trägheitskräfte, die an den Einzelteilchen angreifen, abzüglich des pro Zeitelement ausgeströmten Impulses.

## § 7. Zustandsgleichungen

Nachdem wir nachgewiesen haben, daß unter Ansatz (3.3) bzw. (3.5) alle notwendigen Bedingungen

für  $T^{\alpha\beta}$  erfüllt, sind wir nunmehr in der Lage, die „Zustandsgleichung“ des idealen Gases für beliebige Zustände (nicht notwendig im thermodynamischen Gleichgewicht) und beliebige Teilchengeschwindigkeiten anzugeben.

Zu diesem Zweck definieren wir den Druck  $p$  über den Spuranteil des Spannungstensors  $\Theta^{(\alpha)(\beta)}$ :

$$p = -\frac{1}{3} \Theta^{(\alpha)}_{(\alpha)}. \quad (7.1)$$

Aus (4.1) folgt hiermit

$$T^{\alpha}_{\alpha} = \mu - 3p \quad (7.2)$$

und mit (3.5) und (4.3)

$$p = \frac{1}{3} \frac{1}{\delta_3 V} \sum_i m^*_i \left[ w_i^\alpha o_\alpha - \frac{1}{w_i^\alpha o_\alpha} \right]. \quad (7.3)$$

Wegen (1.2) erhalten wir damit die Zustandsgleichung in der Form:

$$p = \frac{1}{3} \frac{1}{\delta_3 V} \sum_i \frac{m^*_i}{\sqrt{1-\beta_i^2}} \beta_i^2. \quad (7.4)$$

Die Entwicklung der rechten Seite nach  $\beta_i^2$  ergibt

$$p = \frac{2}{3} \frac{1}{\delta_3 V} \sum_i \frac{m^*_i}{2} \beta_i^2 + O(\beta_i^4), \quad (7.5)$$

welcher Ausdruck für niedrige Temperaturen in die bekannte Zustandsgleichung für das ideale Gas übergeht.

Es sei abschließend noch darauf hingewiesen, daß die rechte Seite von (7.4) nicht ohne weiteres durch Zustandsgrößen wie  $\mu$ ,  $q^*$  usw. ausgedrückt werden kann.

Herrn Prof. Dr. H. HÖNL bin ich für kritische Bemerkungen und wertvolle Ratschläge sehr dankbar. Herrn Dr. H. DEHNEN danke ich sehr herzlich für nützliche Hinweise und zahlreiche klärende Diskussionen.